

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2021/2022

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>

Abgabe: Mittwoch, 02.02.2022, 17 Uhr

Aufgabe 41: Bestimme die Ableitungen folgender Funktionen in allen Punkten, in denen sie differenzierbar sind.

(i) $f(x) = x^2 e^{-3x}$;

(iii) $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$;

(ii) $f(x) = \log(\log x)$, $x > 1$;

(iv) $f(x) = (\exp(x^2))^2$.

Aufgabe 42: Wo sind folgende Funktionen stetig, differenzierbar, bzw. stetig differenzierbar?

(i) $f(x) = \begin{cases} x \cdot |x|^\alpha & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

Hierbei sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest.

(ii) $f(x) = \begin{cases} q^{-2} & \text{falls } x = p/q, p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, p, q \text{ teilerfremd} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$

Aufgabe 43: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf dem offenen Intervall I differenzierbare Funktion. Beweise oder widerlege, dass dann die (nicht notwendig stetige) Ableitung f' den Zwischenwertsatz erfüllt:

Zu beliebigen Werten $a, b \in I$ und α zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ existiert ein Wert c zwischen a und b , so dass $f'(c) = \alpha$.

Aufgabe 44: Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt für alle x ungleich 0 oder 1 die Funktionalgleichung

$$f(x) + f(1 - 1/x) = x. \quad (1)$$

Bestimme f .

Ist f eindeutig durch Gleichung (1) bestimmt, selbst wenn f nicht als stetig vorausgesetzt wird?